

Vorkurs Mathematik

10. Grundlagen der Vektorgeometrie und Lineare Algebra

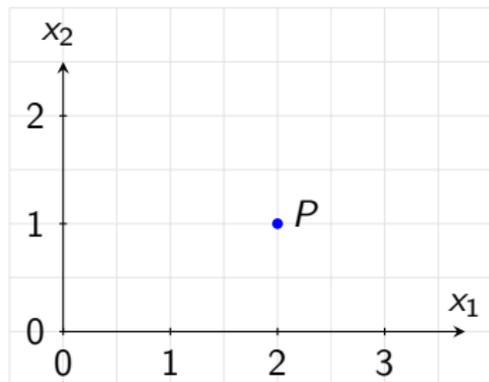
Prof. Dr. Thomas Dimpfl

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften



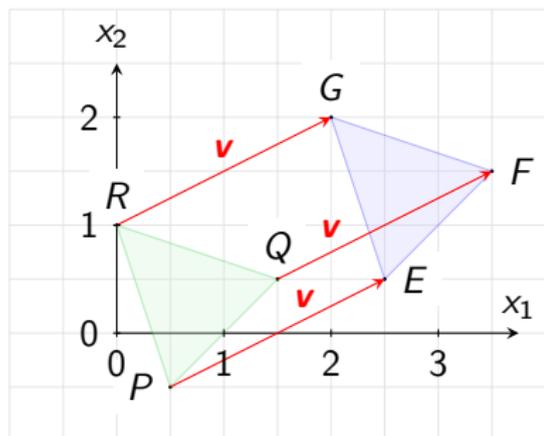
UNIVERSITÄT
HOHENHEIM

10.1 Vektoren



Ein Punkt P im Koordinatensystem wird mithilfe seiner Koordinaten angegeben, z.B. $P(2, 1)$. Eine solche Liste von Zahlen bezeichnet man als Tupel.

10.1 Vektoren



Zahlentupel können nicht nur als Punkt, sondern auch als Verschiebung aufgefasst werden. Man spricht von einem Vektor und schreibt

$$\mathbf{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10.1 Vektoren

Definition: Vektor

Ein **Vektor**

$$\mathbf{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Verschiebung im Raum.

Zu zwei gegebenen Punkten $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ verschiebt der Vektor

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

den Punkt A auf den Punkt B .

10.2 Ortsvektor

Zu jedem Punkt $P(p_1, p_2, p_3)$ gibt es einen Vektor \overrightarrow{OP} , der den Ursprung $O(0, 0, 0)$ auf diesen Punkt abbildet.

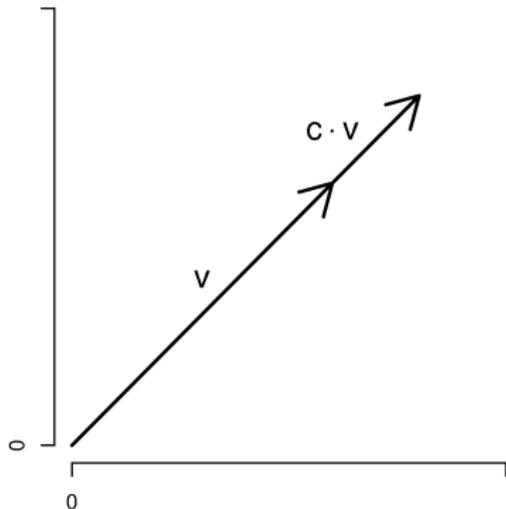
$$\text{Es gilt } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ p_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

\overrightarrow{OP} heißt **Ortsvektor des Punktes P**. Ein Punkt und sein Ortsvektor haben dieselben Koordinaten.

10.3 Rechnen mit Vektoren

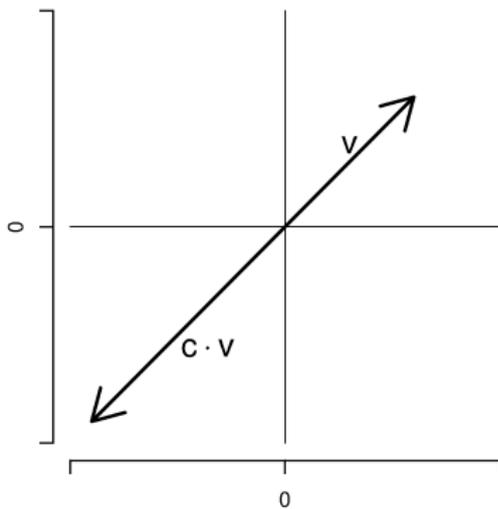
Multiplikation eines Vektors \mathbf{v} mit einem Skalar c

Fall 1: $c > 0$



(Veränderung der Länge des Vektors)

Fall 2: $c < 0$

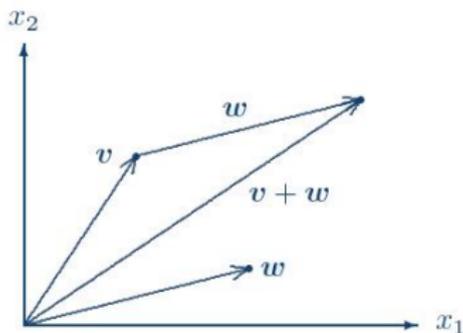


(Veränderung der Länge und der Richtung des Vektors)

10.3 Rechnen mit Vektoren

Summe von zwei Vektoren

$\mathbf{v} + \mathbf{w}$ mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$:



Es gilt das Kommutativgesetz: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.

10.3 Rechnen mit Vektoren

Linearkombination

Einen Ausdruck

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n$$

mit $n \in \mathbb{N}$ nennt man eine *Linearkombination* der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$; die reellen Zahlen c_1, c_2, \dots, c_n heißen *Koeffizienten*.

10.4 Skalarprodukt

Inneres Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} :

$$\begin{matrix} \mathbf{v}' & \cdot & \mathbf{w} \\ (1 \times n) & & (n \times 1) \end{matrix} = (v_1 \quad v_2) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

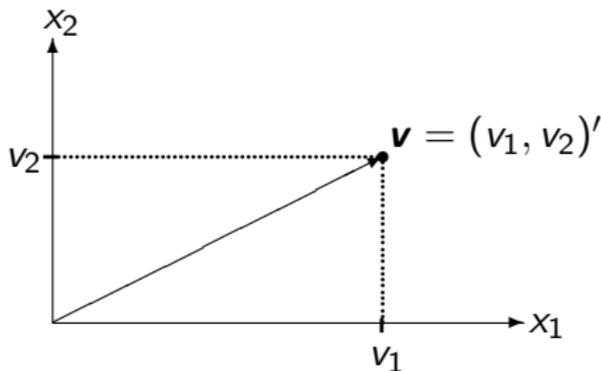
Das Ergebnis ist ein Skalar.

10.5 Länge/Betrag eines Vektors

Die Länge oder der Betrag eines Vektors $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)'$ wird wie folgt bestimmt:

$$d(\mathbf{v}) \equiv \|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\mathbf{v}'\mathbf{v}}$$

Illustration für den Fall $n = 2$:



10.6 Winkel zwischen zwei Vektoren

Der Winkel zwischen zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} lässt sich berechnen aus

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

bzw.

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

10.7 Lineare Gleichungssysteme

Zwei lineare Gleichungen mit zwei gemeinsamen Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem (LGS). Das LGS kann durch Einsetzverfahren, Additionsverfahren, oder mit dem Gauß-Verfahren gelöst werden.

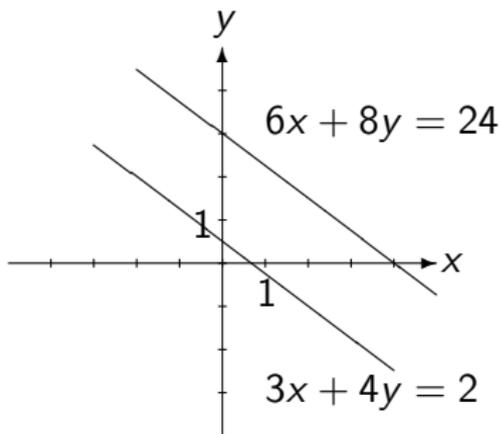
10.7 Lineare Gleichungssysteme

Veranschaulichung der möglichen Lösungsmengen eines LGS's

Fall I: Keine Lösung

$$3x + 4y = 2$$

$$6x + 8y = 24$$



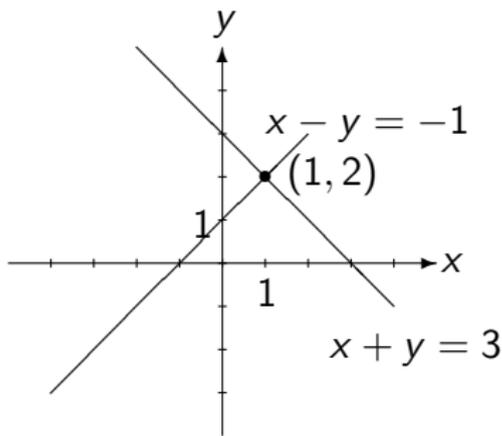
10.7 Lineare Gleichungssysteme

Veranschaulichung der möglichen Lösungsmengen eines LGS's

Fall II: Eindeutige Lösung:

$$x + y = 3$$

$$x - y = -1$$

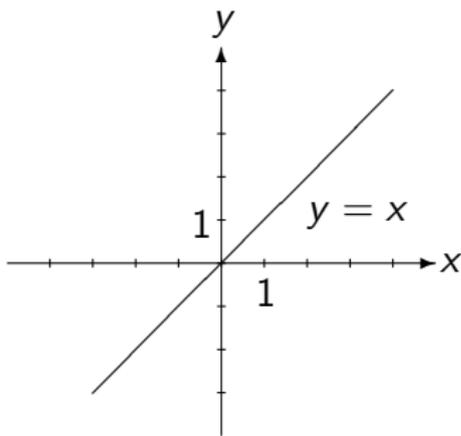


10.7 Lineare Gleichungssysteme

Veranschaulichung der möglichen Lösungsmengen eines LGS's

Fall III: Unendlich viele Lösungen:

$$\begin{aligned}x - y &= 0 \\2x - 2y &= 0\end{aligned}$$



10.7 Lineare Gleichungssysteme

Gauß-Verfahren

Ziel: ein LGS in Stufenform

Beispiel Fall II:

$$x + y = 3$$

$$2y = 4$$

Um dies zu erreichen, sind folgende Äquivalenzumformungen eines LGS möglich:

- ▶ Zwei Gleichungen werden miteinander vertauscht.
- ▶ Eine Gleichung wird mit einer Zahl $c \neq 0$ multipliziert.
- ▶ Eine Gleichung wird durch die Summe oder Differenz von ihr und einer anderen Gleichung ersetzt.