Vorkurs Mathematik

10. Grundlagen der Vektorgeometrie und Lineare Algebra

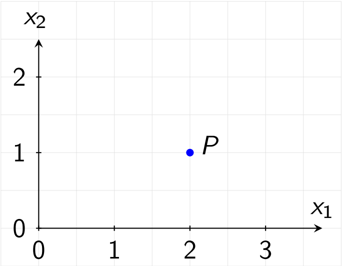
Dr. Günter Winterholer

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

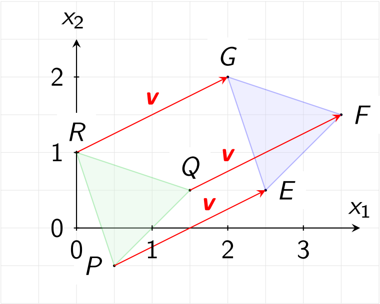
UNIVERSITÄT HOHENHEIM

10.1 Vektoren



Ein Punkt P im Koordinatensystem wird mithilfe seiner Koordinaten angegeben, z.B. $P(2, 1)$. Eine solche Liste von Zahlen bezeichnet man als Tupel.

10.1 Vektoren



Zahlentupel können nicht nur als Punkt, sondern auch als Verschiebung aufgefasst werden. Man spricht von einem Vektor und schreibt

$$\boldsymbol{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10.1 Vektoren

Definition: Vektor

Ein **Vektor**

$$\boldsymbol{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Verschiebung im Raum.

Zu zwei gegebenen Punkten $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ verschiebt der Vektor

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

den Punkt A auf den Punkt B.

10.2 Ortsvektor

Zu jedem Punkt $P(p_1, p_2, p_3)$ gibt es einen Vektor $\overrightarrow{OP}$, der den Ursprung $O\,(0,0,0)$ auf diesen Punkt abbildet.

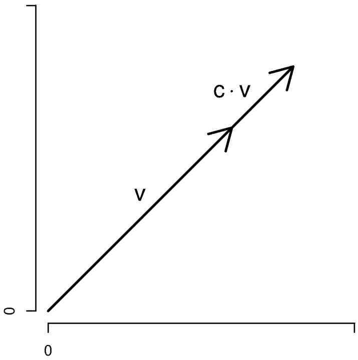
Es gilt $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ p_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OP}$ heißt **Ortsvektor des Punktes P**. Ein Punkt und sein Ortsvektor haben dieselben Koordinaten.

10.3 Rechnen mit Vektoren

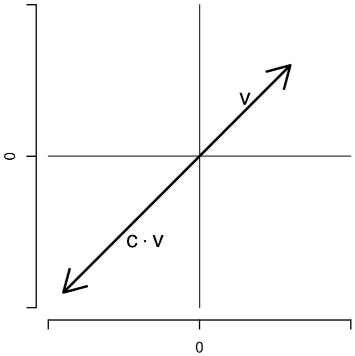
Multiplikation eines Vektors $\boldsymbol{v}$ mit einem Skalar c

Fall 1: $c > 0$



(Veränderung der Länge des Vektors)

Fall 2: $c < 0$

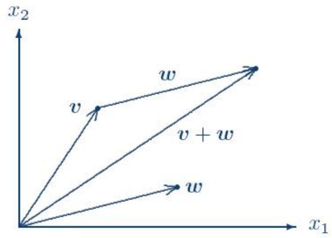


(Veränderung der Länge und der Richtung des Vektors)

10.3 Rechnen mit Vektoren

Summe von zwei Vektoren

$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$:



Es gilt das Kommutativgesetz: $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$.

10.3 Rechnen mit Vektoren

Linearkombination

Einen Ausdruck

$$c_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + c_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n \cdot \boldsymbol{v}_n$$

mit $n \in \mathbb{N}$ nennt man eine *Linearkombination* der Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$; die reellen Zahlen $c_1, c_2, \ldots c_n$ heißen *Koeffizienten*.

10.4 Skalarprodukt

Inneres Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$:

$$\underset{(1\times n)}{\boldsymbol{v}'} \cdot \underset{(n\times 1)}{\boldsymbol{w}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$$

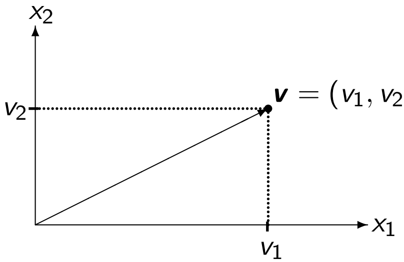
Das Ergebnis ist ein Skalar.

10.5 Länge/Betrag eines Vektors

Die Länge oder der Betrag eines Vektors $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)'$ wird wie folgt bestimmt:

$$d(\boldsymbol{v}) \equiv \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}}$$

Illustration für den Fall $n = 2$:



10.6 Winkel zwischen zwei Vektoren

Der Winkel zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ lässt sich berechnen aus

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

bzw.

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

10.7 Lineare Gleichungssysteme

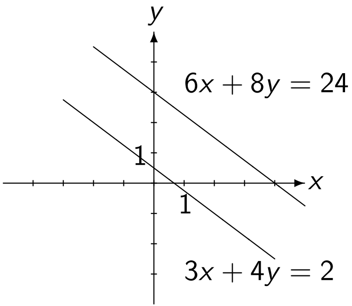
Zwei lineare Gleichungen mit zwei gemeinsamen Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem (LGS). Das LGS kann durch Einsetzverfahren, Additionsverfahren, oder mit dem Gauß-Verfahren gelöst werden.

10.7 Lineare Gleichungssysteme

Veranschaulichung der möglichen Lösungsmengen eines LGS's

$\boxed{\text{Fall I:}}$ Keine Lösung

$$3x + 4y = 2$$
$$6x + 8y = 24$$

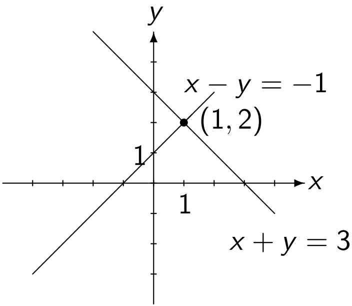


10.7 Lineare Gleichungssysteme

Veranschaulichung der möglichen Lösungsmengen eines LGS's

$\boxed{\text{Fall II:}}$ Eindeutige Lösung:

$$x + y = 3$$
$$x - y = -1$$

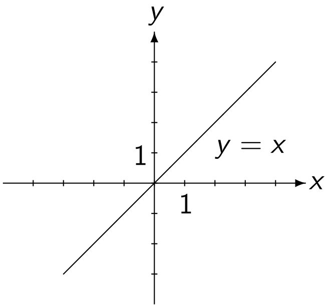


10.7 Lineare Gleichungssysteme

Veranschaulichung der möglichen Lösungsmengen eines LGS's

$\boxed{\text{Fall III:}}$ Unendlich viele Lösungen:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{aligned}$$



10.7 Lineare Gleichungssysteme

Gauß-Verfahren

Ziel: ein LGS in Stufenform
Beipiel Fall II:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2y &= 4 \end{aligned}$$

Um dies zu erreichen, sind folgende Äquivalenzumformungen eines LGS möglich:

- Zwei Gleichungen werden miteinander vertauscht.
- Eine Gleichung wird mit einer Zahl $c \neq 0$ multipliziert.
- Eine Gleichung wird durch die Summe oder Differenz von ihr und einer anderen Gleichung ersetzt.