Vorkurs Mathematik

1. Mengenlehre und Zahlenbereiche

Dr. Günter Winterholer

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

UNIVERSITÄT HOHENHEIM

1.1 Mengenlehre

Ausgangspunkt: **Menge** von Objekten.

Beispiele

Folgende Beschreibungen definieren Mengen von Objekten:

- Studierende aller Hochschulen in Deutschland,
- Fischarten in deutschen Gewässern,
- Anzahl an Autounfällen in einem gewissen Zeitraum in Tübingen.

Abstraktere Beispiele von Mengen sind die üblichen Zahlenbereiche wie reelle oder natürliche Zahlen.

1.1 Mengenlehre

Definition: *Menge, Element*

*Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens. Die Objekte heißen **Elemente** der Menge.*

Schreibweise: Mengen werden i.d.R. mit Großbuchstaben (z.B. A) und ihre Elemente mit Kleinbuchstaben (z.B. a_1, a_2, a_3) bezeichnet.

1.1 Mengenlehre

Um eine Menge beschreiben zu können, wird eine Vorschrift benötigt, welche ihre Elemente eindeutig festlegt. Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

- Aufzählung der Elemente: Die Elemente der Menge werden aufgelistet und in geschweiften Klammern angegeben. Jedes Element wird **genau einmal** aufgeführt. $M = \{a, b, c, d\}$
- Angabe von Eigenschaften, die angeben, ob ein Element zur Menge gehört oder nicht: $M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$

  Alternative Notation: $M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$
- Elemente einer Menge:

  $a \in M$: a ist Element von Menge M oder
  $e \notin M$: e ist nicht Element von M.

1.1 Mengenlehre

- **Grundmenge** Ω: Alle relevanten Elemente.
- **Leere Menge** $\{\}$ (auch $\emptyset$) enthält keine Elemente.
- **Gleichheit von Mengen:** Zwei Mengen sind gleich ($A = B$), wenn jedes Element aus A auch Element von B und zugleich jedes Element aus B auch Element von A ist.

  Beachte: Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle!

  $$\{a, b, c, d\} = \{c, a, d, b\}$$

- **Teilmenge:** Ist jedes Element von A auch ein Element von B, so ist A *Teilmenge* von B $\quad (A \subset B)$.
  Für alle Mengen gilt: $\{\} \subset A, \qquad A \subset A$.
- **Komplementärmenge:** $\overline{M} = \{x \mid x \notin M \ \wedge x \in \Omega\}$ ist Komplement zu $M \subset \Omega$. *Alternative Schreibweise:* M^c.

  Es gilt: $\overline{\overline{M}} = M, \qquad \overline{\emptyset} = \Omega, \qquad \overline{\Omega} = \emptyset$

1.1 Mengenlehre

Im Folgenden wird eine Grundmenge Ω mit Teilmengen A, B und C betrachtet.

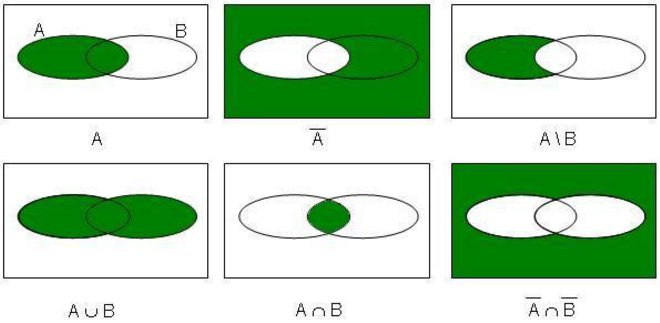
Mengenoperationen:

- **Durchschnitt** (Schnittmenge): $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
  Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

  Disjunkte Mengen: Ist der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer ($A \cap B = \emptyset$), so heißen A und B disjunkt (elementfremd).
- **Vereinigung:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
  Menge aller Elemente, die in A oder in B oder in beiden enthalten sind.
- **Differenz von Mengen:** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
  Menge aller Elemente von A, die nicht in B enthalten sind.

1.1 Mengenlehre

Anschauliche grafische Darstellung der Mengen und Mengenoperationen mittels **Venn-Diagramme**:



1.1 Mengenlehre

- Identitätsgesetze:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A.$$

- Kommutativgesetze:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

- Assoziativgesetze:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Im Allgemeinen gilt jedoch nicht: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$!

- Distributivgesetze:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

- Gesetze von De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

1.2 Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

Definition

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Bei Hinzunahme der Null schreibt man $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Addiert oder multipliziert man zwei natürliche Zahlen, so ist das Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Man sagt, $\mathbb{N}$ ist bezüglich der Addition und der Multiplikation abgeschlossen.

1.2 Zahlenbereiche

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$: Diese Zahlen erweitern die natürlichen Zahlen um negative ganze Zahlen.

Definition

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Anmerkungen:

- Jede Gleichung der Form $a + x = b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ ist somit lösbar.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- Addieren, Multiplizieren und Subtrahieren von Zahlen aus $\mathbb{Z}$ ergeben wieder Elemente aus $\mathbb{Z}$, d.h. $\mathbb{Z}$ ist gegenüber der Addition, Multiplikation und Subtraktion abgeschlossen.

1.2 Zahlenbereiche

Rechenregeln:

- $-(-a) = a$
- $-(b + c) = -b - c$
- $-(b - c) = -b + c$
- $(+a)(-b) = -(ab)$,
- $(-a)(-b) = ab$
- Distributivgesetz: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$

1.2 Zahlenbereiche

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$: Die rationalen Zahlen umfassen die Menge aller Quotienten zweier ganzer Zahlen, wobei die Einschränkung gilt, dass der Nenner nicht 0 sein darf. Rationale Zahlen sind periodische oder abbrechende Dezimalzahlen.

Definition

Die Menge der *rationalen Zahlen* ist definiert durch
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$.
Mit der Erweiterung auf die rationalen Zahlen sind alle vier Grundrechenarten ausführbar.

1.2 Zahlenbereiche

Anmerkungen:

- Jede Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ ist somit lösbar.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Insbesondere ist jede ganze Zahl als Bruch darstellbar.
- $\mathbb{Q}$ ist bezüglich der Grundrechenarten abgeschlossen. Dabei ist die Division durch Null nicht erlaubt.
- Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.
- Eine Zahl ist rational genau dann, wenn ihre Dezimaldarstellung abbricht oder periodisch ist.

1.2 Zahlenbereiche

Rechenregeln für rationale Zahlen:

- Erweitern: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}, \quad k \neq 0$
- Kürzen: $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$.
- Addition: $\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_1} = \frac{a_1 \pm a_2}{b_1}$
- Addition: $\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 \pm a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}$, dabei heißt $b_1 \cdot b_2$ **gemeinsamer Nenner**.
- Multiplikation: $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$
- Division: $\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}$ (Multiplikation mit dem Kehrwert).

1.2 Zahlenbereiche

Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$: Alle nichtperiodischen, nichtabbrechenden Dezimalzahlen bezeichnet man als *irrationale Zahlen*.

Beispiele:

- Kreiszahl $\pi \approx 3,14159265358979311 6...$
- Eulersche Zahl $e \approx 2,71828182845904509 08...$
- $\sqrt{2} \approx 1,41421356237309504 88...$

Jede irrationale Zahl lässt sich durch rationale Zahlen beliebig genau approximieren. Beipiel:

$$\begin{aligned} 3 < &\quad \pi \quad < 4 \\ 3,1 < &\quad \pi \quad < 3,2 \\ 3,14 < &\quad \pi \quad < 3,15 \\ 3,141 < &\quad \pi \quad < 3,142. \end{aligned}$$

1.2 Zahlenbereiche

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$: Die *rationalen* und *irrationalen* Zahlen zusammengenommen werden als *reelle Zahlen* bezeichnet.

Anmerkungen:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
- Die Menge $\mathbb{R}$ füllt die ganze Zahlengerade aus. Insbesondere kann die Menge der reellen Zahlen nicht in aufzählender Form geschrieben werden.