Vorkurs Mathematik

2. Elementare Algebra: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Dr. Günter Winterholer

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

UNIVERSITÄT HOHENHEIM

2.1 Potenzen

Definition: *Ganzzahlige Potenzen*

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (**Basis**) und $n \in \mathbb{N}_0$ (**Exponent**) gilt

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$$

.

- Es gilt: $a^0 \equiv 1$.
- Potenzen mit negativem Exponenten: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ mit $a \neq 0$.
- Nicht definiert ist dagegen der Ausdruck 0^0.

2.1 Potenzen

Rechenregeln für Potenzen:

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$

(ii) $(a^r)^s = a^{rs}$

(iii) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

(iv) $(ab)^r = a^r b^r$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

2.1 Potenzen

Anmerkungen:

Die obigen Regeln können ohne weiteres auf Ausdrücke mit mehr als zwei Faktoren angewandt werden.

Beachte: Bei unterschiedlichen Basen und unterschiedlichen Exponenten ist keine Potenzregel anwendbar!

Für beliebige a, b, r und s gilt:

$$a^r \pm a^s \neq a^{r+s} \qquad a^r \pm b^r \neq (a \pm b)^r$$

$$a^r b^s \neq (ab)^{r+s} \qquad \frac{a^r}{b^s} \neq \left(\frac{a}{b}\right)^{r+s}$$

2.2 Wurzeln

Definition: *Wurzeln/Gebrochene Potenzen*

Ist a die n-te Potenz einer nicht-negativen Zahl x, so nennen wir x die n**-te Wurzel** von a:

$$x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}.$$

a heißt **Radikand**, n **Wurzelexponent**.
Die n-te Wurzel kann auch als Potenz mit dem Exponenten $\frac{1}{n}$ geschrieben werden:

$$\sqrt[n]{a} \equiv a^{1/n}\,,\ a \geq 0\,,\ n \in \mathbb{N}$$

2.2 Wurzeln

Der Spezialfall $n = 2$ bezeichnet die **Quadratwurzel** aus der positiven Zahl a.
Für $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $\sqrt[n]{a^m} := a^{\frac{m}{n}}$. Allgemein gelten für beliebige $a, b > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ folgende

Rechenregeln für gebrochene Potenzen:

(i) $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[m]{a^q} = a^{\frac{p}{n}} a^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{pm+qn}{mn}} = \sqrt[nm]{a^{pm+qn}}$

(ii) $\sqrt[n]{a^p} : \sqrt[m]{a^q} = \sqrt[nm]{a^{pm-qn}}$

(iii) $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^p})^q} = \sqrt[nm]{a^{pq}}$

(iv) $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{(ab)^p}$

(v) $\dfrac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{b^p}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^p}$

2.2 Wurzeln

Anmerkungen:

- Der häufigste Fehler beim Wurzelrechnen ist:
  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Das ist **falsch!**
- Da z.B. $(-2)^2 = 2^2 = 4$ gilt, sind $x = 2$ und $x = -2$ Lösungen der **quadratischen Gleichung** $x^2 = 4$.
  Dies wird oft geschrieben als: $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.
- Letzteres ist zu unterscheiden vom Symbol $\sqrt{4}$ das stets 2 bedeutet und nicht auch -2.
- Für **ungerades** $n \in \mathbb{N}$ kann $a^{\frac{m}{n}}$ sogar für $a < 0$ sinnvoll definiert werden.
  Z.B. gilt: $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

2.3 Logarithmen

Definition

Für jedes $a > 0$ mit $a \neq 1$ und jedes $b > 0$ hat die Gleichung

$$a^x = b$$

genau eine Lösung. Diese Lösung heißt **Logarithmus von b zur Basis a** und wird mit $x = \log_a b$ bezeichnet.

Es gilt also $\qquad x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b.$

Besondere Bedeutung als Basen haben die Werte

- $a = 10$: dekadischer Logarithmus; Schreibweise $\log x$
  $x = \log b = \log_{10} b \Leftrightarrow 10^x = b$
- $a = e$: natürlicher Logarithmus; Schreibweise $\ln x$
  $x = \ln b = \log_e b \Leftrightarrow e^x = b$

2.3 Logarithmen

Logarithmusgesetze

(i) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

(ii) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

(iii) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad (r \in \mathbb{R})$

Aus den Rechenregeln ergeben sich unmittelbar zwei wichtige Sonderfälle:

- $\log_a(1/x) = \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$
- $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \log_a(x^{1/n}) = \frac{1}{n} \log_a x$

2.3 Logarithmen

Beachte: Es gibt keine Umformungen für $\log(x+y)$ bzw. $\log(x-y)$.

Allgemein gilt: $\log_a a^x = x$ und $a^{\log_a x} = x$.

Speziell für den dekadischen bzw. den natürlichen Logarithmus gilt entsprechend:

- $\log 10^x = x$ und $10^{\log x} = x$
- $\ln e^x = x$ und $e^{\ln x} = x$.

Es gilt: $\ln 1 = 0$ und $\log 1 = 0$.

2.3 Logarithmen

In Taschenrechnern und auch in Mathematik-Softwarepaketen sind ausschließlich der dekadische und der natürliche Logarithmus enthalten.

Man kann Logarithmen verschiedener Basen umrechnen mit der Beziehung:

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{log_c a}$$

Sinnvollerweise wählen wir als Basis c entweder 10 oder e und erhalten

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a} \ .$$