Vorkurs Mathematik

3. Elementare Algebra: Gleichungen

Dr. Günter Winterholer

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

UNIVERSITÄT HOHENHEIM

3.1 Definition einer Gleichung

Eine **Gleichung** besteht aus zwei mathematischen Ausdrücken (Termen), die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

Enthält mindestens einer der Ausdrücke eine Variable, so sucht man nach der Lösung der Gleichung.

Die Menge aller Lösungen, die auch leer sein kann, bezeichnet man als Lösungsmenge der Gleichung.

Beispiel: $\underbrace{3x + 5}_{Term1} = \underbrace{2x - 1}_{Term2}$

Rechenregeln der Gleichungs-Beziehung:

- Symmetrie: $a = b \Leftrightarrow b = a$
- Transitivität: Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$

3.2 Lösungsermittlung

Um eine Gleichung zu lösen, wird solange umgeformt, bis die Variable allein auf einer Seite steht. Diese Umformungen heißen **Äquivalenzumformungen**.

Rechenregeln:

- Addition (Subtraktion) des gleichen Terms auf beiden Seiten.
  $a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$
- Multiplikation mit gleichen Termen (ungleich Null) auf beiden Seiten.
  $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c, \; c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$
- Division durch gleiche Terme (ungleich Null) auf beiden Seiten.
  $a = b \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}, \; c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

3.3 Quadratische Gleichungen

- Die Lösung für die **allgemeine Form** einer quadratischen Gleichung

  $$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ist} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Die Lösung für die **Normalform** einer quadratischen Gleichung

  $$x^2 + px + q = 0 \quad \text{ist} \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

3.3 Quadratische Gleichungen

- Eine quadratische Gleichung besitzt *keine, eine* oder *zwei reelle Lösungen*, wenn der Ausdruck $b^2 - 4ac$ bzw. $p^2/4 - q$ (*Diskriminante*) *kleiner, gleich* oder *größer* als Null ist.
- Eine quadratische Gleichung besitzt keine reelle Lösung, wenn die Diskriminante negativ ist. Sie besitzt aber zwei (konjungiert) komplexe Lösungen im Bereich der komplexen Zahlen.
- Die Lösungen einer (quadratischen) Gleichung werden oft auch als **Wurzeln** (roots) der Gleichung bezeichnet.

3.3 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen können auch mit **quadratischer Ergänzung** gelöst werden. Hierbei werden die **binomischen Formeln** zur Hilfe genommen.

Binomische Formeln

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

3.4 Ungleichungen

Eine **Ungleichung** besteht aus zwei mathematischen Ausdrücken (Termen), die durch ein Relationszeichen ($<, \leq, >, \geq$) verbunden sind.

Beispiel: $\underbrace{3x+5}_{Term1} \leq \underbrace{2x-1}_{Term2}$

Eigenschaften der Relationszeichen:

- Reflexivität: $a \leq a$ (d.h. jedes Element steht zu sich selbst in Relation)
- Transitiviät: Ist $a > b$ und $b > c$, dann ist $a > c$.
  Die anderen Rechenzeichen sind ebenfalls transitiv.
- Antisymmetrie: Ist $a \leq b$ und $b \leq a$, dann gilt $a = b$.

3.4 Ungleichungen

Wichtige Rechenregeln:

- Addition bzw. Subtraktion von $d \in \mathbb{R}$:
  $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \pm d > b \pm d$
- Multiplikation bzw. Division mit **positivem** $d \quad (d \in \mathbb{R}^+)$:
  $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d > b \cdot d \quad$ bzw. $\quad a/d > b/d$.
- Multiplikation bzw. Division mit **negativem** $d \quad (d \in \mathbb{R}^-)$:
  $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d < b \cdot d \quad$ bzw. $\quad a/d < b/d$
  (Umkehrung der Anordnung!)
- Bildet man auf beiden Seiten einer Ungleichung den Kehrwert, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0, \qquad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

3.4 Ungleichungen

- Die Rechenregeln gelten auch für den Fall schwacher Ungleichungen ($\leq, \geq$).
- Die Lösungen einer Ungleichung werden in einer **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ zusammengefaßt.
- Zwei Ungleichungen, die gleichzeitig gelten sollen, werden als **Doppelungleichung** bezeichnet.

  Beispiel: *Wenn gleichzeitig gelten soll:* $a \leq z$ *und* $z < b$, *dann kann man kompakt schreiben:* $a \leq z < b$.
- Oft ist bei der Lösung einer Ungleichung eine **Fallunterscheidung** durchzuführen.
- Anwendung von Ungleichungen insb. in der Kurvendiskussion und der Linearen Optimierung.