Vorkurs Mathematik

4. Analysis: Funktionen

Dr. Günter Winterholer

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

UNIVERSITÄT HOHENHEIM

4.1 Grundlegende Definitionen

Definition: Abbildung oder Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine Vorschrift f, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet, heißt Abbildung oder Funktion der Menge X in die Menge Y. Wir schreiben:

$$f : X \to Y \qquad \text{oder elementweise} \qquad x \in X \mapsto f(x) = y \in Y$$

Definition: Definitions- und Wertebereich

Die Menge aller Werte, die für x zugelassen werden, heißt **Definitionsbereich** D_f der Funktion. Die Menge der Werte, die $y = f(x)$ annimmt, heißt **Wertebereich** W_f der Funktion.

4.2 Verknüpfung und Verkettung von Funktionen

Bei einer **Verknüpfung** werden zwei Funktionen f und g mit einem gemeinsamen Definitionsbereich durch eine der vier Grundrechenarten miteinander verbunden.

Operation	Funktion	Funktionswert	Definitionsbereich
Summe	$h = f + g$	$h(x) = f(x) + g(x)$	$D_h = D_f \cap D_g$
Differenz	$h = f - g$	$h(x) = f(x) - g(x)$	$D_h = D_f \cap D_g$
Produkt	$h = f \cdot g$	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_h = D_f \cap D_g$
Quotient	$h = \frac{f}{g}$	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_h = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\}$

4.2 Verknüpfung und Verkettung von Funktionen

Bei einer **Verkettung** werden zwei Funktionen f und g „hintereinander“ ausgeführt (formal $f \circ g$). An die Stelle der unabhängigen Variablen einer Funktion tritt der komplette Funktionsterm der anderen Funktion.
Man bezeichnet die durch Einsetzen von g in f entstandene neue Funktion $f \circ g = f(g(x))$ als die aus f und g verkettete Funktion.
g ist die innere Funktion und f ist die äußere Funktion.

Operation	Funktion	Funktionswert	Definitionsbereich
Verkettung	$h = f \circ g$	$h(x) = f(g(x))$	$D_h = \{x : x \in D_g ; g(x) \in D_f\}$

Anmerkung:
Damit eine Verkettung $f(g(x))$ zweier Funktionen f und g möglich ist, müssen die Werte der inneren Funktion g zumindest teilweise im Definitionsbereich der äußeren Funktion f liegen.

4.3 Monotonie

Definition

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f(x)$:

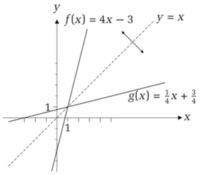
- streng monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

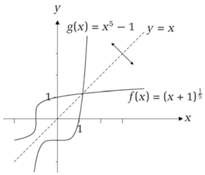
4.4 Umkehrfunktion

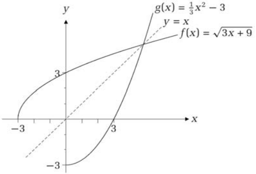
Definition

Eine Funktion $y = f(x)$ mit $x \in D_f; y \in W_f$ heißt eineindeutig, wenn es zu jedem y genau einen Wert x gibt. Zur eineindeutigen Funktion $y = f(x)$ existiert eine **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** $x = g(y) = f^{-1}(y)$. Es gilt $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Die Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion sind symmetrisch zur Geraden $x = y$.







4.4 Umkehrfunktion

Satz

Sei f eine streng monotone Funktion in D_f. Dann existiert zu f die Umkehrfunktion f^{-1} mit $D_{f^{-1}} = W_f$. Die Umkehrung gilt nicht.

4.5 Elementare Typen von Funktionen

Polynome

Ganzrationale Funktionen (Polynome) sind Funktionen mit dem Funktionsterm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_i (i = 1, \ldots, n)$ beliebige reelle Zahlen sind und an $a_n \neq 0$. $\mathbf{a_0, a_1, \ldots, a_n}$ heißen die **Koeffizienten** des Polynoms. Die Zahl $\mathbf{n}$ heißt **Grad der Funktion**.

4.5 Elementare Typen von Funktionen

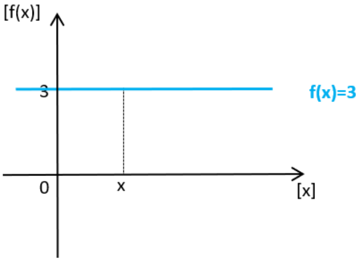
Konstante Funktion

Ein Polynom der Form

$$f(x) = a = const.$$

heißt **konstante Funktion** mit Grad $n = 0$.
Der Graph ist eine Parallele zur Abszisse (x-Achse).

Beispiel:



4.5 Elementare Typen von Funktionen

Lineare Funktion

Ein Polynom der Form

$$f(x) = mx + b$$

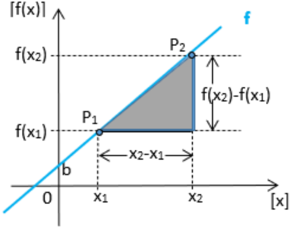
heißt **lineare Funktion** mit Grad $n = 1$.
m ist die **Steigung** und b der **y-Achsenabschnitt**.
Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

4.5 Elementare Typen von Funktionen

Lineare Funktion

Die **Steigung einer Geraden** definiert als das Verhältnis von Ordinatendifferenz $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ zur entsprechenden Abszissendifferenz $x_2 - x_1$ zweier beliebiger Geradenpunkte $P1 \neq P2$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (x_2 \neq x_1)$$



Punkt $P_1(x_1, f(x_1))$

Punkt $P_2(x_2, f(x_2))$

4.5 Elementare Typen von Funktionen

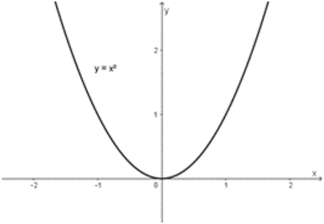
Quadratische Funktion

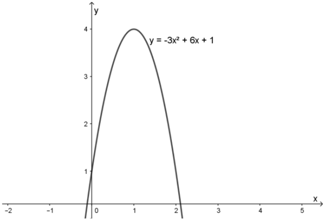
Ein Polynom der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

heißt **quadratische Funktion** mit Grad $n = 2$.
Häufig schreibt man auch: $f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad x \in \mathbb{R}$.
Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

Beispiele:





4.5 Elementare Typen von Funktionen

Quadratische Funktion

Anmerkungen:

- Ist in der Parabelgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ der Koeffizient a des quadratischen Gliedes **positiv**, so ist die Parabel nach **oben geöffnet**, ist er **negativ**, so ist die Parabel nach **unten geöffnet**.
- Die Nullstellen quadratischer Polynome erhält man als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

4.5 Elementare Typen von Funktionen

Quadratische Funktion

Scheitelform einer quadratischen Funktion:

$$f(x) = a(x-d)^2 + e$$

mit Scheitelpunkt $S(d|e)$

Die allgemeine Form $ax^2 + bx + c$ kann mittels quadratischer Ergänzung in die Scheitelform überführt werden.

4.5 Elementare Typen von Funktionen

Gebrochen-rationale Funktion

Eine **gebrochen-rationale Funktion** ist eine Funktion, bei der sich sowohl im Zähler als auch im Nenner eine ganzrationale Funktion befindet:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$= \frac{Z_n(x)}{N_k(x)} \left(= \frac{Z\ddot{a}hlerpolynom}{Nennerpolynom} \right) \qquad \text{mit } a_n, b_k \neq 0; n, k \in \mathbb{N}_0$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x^3 + 10x^2 - 3}{6x^4}$

4.5 Elementare Typen von Funktionen

Gebrochen-rationale Funktion

Anmerkungen:

- Bei gebrochen-rationalen Funktionen vergleicht man den Grad n der Zählerfunktion mit dem Grad k der Nennerfunktion.
- Bei **echt gebrochen-rationalen Funktionen** ist **Grad** n des Zählerpolynoms $Z_n(x)$ **kleiner als** der **Grad** k des Nennerpolynoms $N_k(x)$.
- Bei **unecht gebrochen-rationalen Funktionen** ist **Grad** n des Zählerpolynoms $Z_n(x)$ **größer als** der **Grad** k des Nennerpolynoms $N_k(x)$.
- Da f an den Nullstellen des Nennerpolynoms $N_k(x)$ **nicht definiert** ist, muss man zur Ermittlung des Definitionsbereichs D_f zunächst die Nullstellen bestimmen und als Definitionslücken ausschließen.

4.5 Elementare Typen von Funktionen

Exponentialfunktion

Die Funktionsgleichung einer **Exponentialfunktion** lautet

$$f(x) = a^x \qquad \text{mit} \qquad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}$$

Anmerkungen:

- a kann jede positive Zahl außer 0 und 1 sein. Ansonsten wäre die Funktion konstant (0 bei $a = 0$ und 1 bei $a = 1$).
- Für **a zwischen 0 und 1** liegt eine **exponentielle Abnahme** vor, d.h. der Graph fällt schnell ab und geht gegen 0. Er nähert sich also der x-Achse immer weiter an, berührt diese aber nie!
- Für **a größer als 1** liegt **exponentielles Wachstum** vor, der Graph steigt schnell an.

4.5 Elementare Typen von Funktionen

Exponentialfunktion

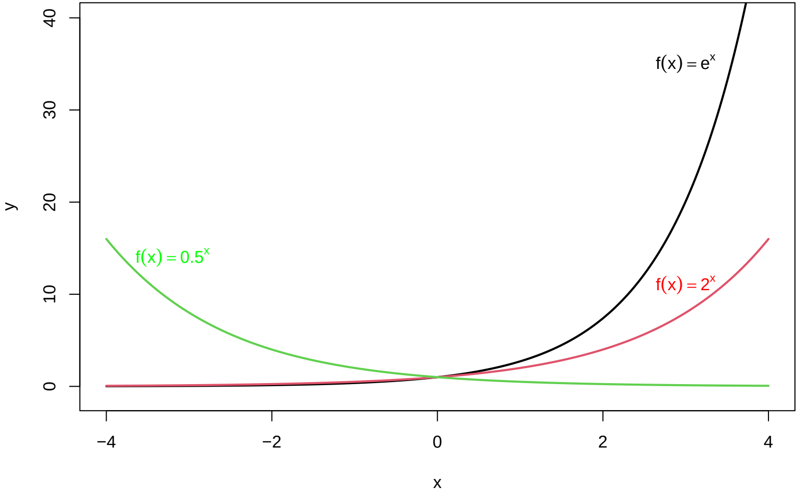
Eigenschaften von Exponentialfunktionen:

- sie hat keine Nullstellen
- die x-Achse ist eine waagerechte Asymptote
- sie hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse bei $(0|1)$
  Monotonie:
- Ist $a < 1$, dann ist die Funktion streng monoton fallend.
- Ist $a > 1$, dann ist die Funktion streng monoton steigend.

4.5 Elementare Typen von Funktionen

Exponentialfunktion

Beispiele für Exponentialfunktionen:



4.5 Elementare Typen von Funktionen

Logarithmusfunktionen

Die Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \ln(x) \qquad \text{mit} \qquad x > 0$$

heißt **natürliche Logarithmusfunktion**. Ihr Definitionsbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen und die Wertemenge umfasst alle reellen Zahlen.

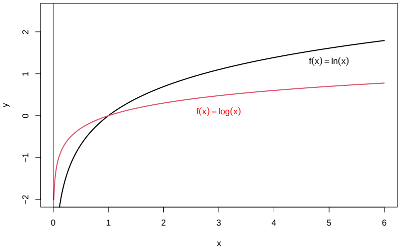
Die Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \log(x) \qquad \text{mit} \qquad x > 0$$

heißt **Zehner-Logarithmusfunktion**. Ihr Definitionsbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen und die Wertemenge umfasst alle reellen Zahlen.

4.5 Elementare Typen von Funktionen

Logarithmusfunktionen



Anmerkungen:
Die natürliche Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, die Zehner-Logarithmusfunktion ist Umkehrfunktion zu $f(x) = 10^x$.

Beide Logarithmusfunktionen haben dieselbe Nullstelle $x = 1$.