Vorkurs Mathematik

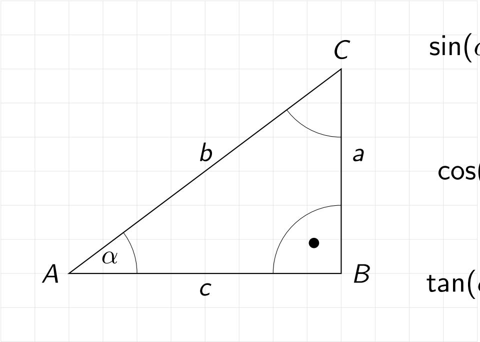
5. Winkelmaße und Trigonometrische Funktionen

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften

UNIVERSITÄT HOHENHEIM

5.1 Die trigonometrischen Funktionen im Dreieck



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{c}{b}$$

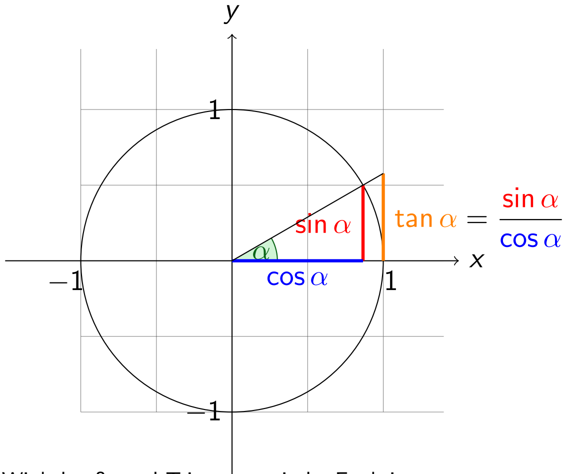
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{c}$$

5.1 Die trigonometrischen Funktionen im Dreieck

Anmerkung:
Es handelt sich bei Sinus, Kosinus und Tangens also um Seitenverhältnisse. In jedem rechtwinkligen Dreieck mit gleichem Winkel α ergeben diese Verhältnisse den gleichen Wert. Dies lässt sich z.B. mit den Strahlensätzen beweisen.

5.2 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

Die Definition von Sinus und Kosinus im Dreieck lässt lediglich Winkel zwischen 0° und 90° zu. Durch Betrachtung der Punkte auf dem *Einheitskreis* (Kreis um $(0;0)$ mit Radius 1) lassen sich Sinus und Kosinus für beliebige Winkel definieren.



5.2 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

Einige wichtige Werte sind:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0

5.2 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

Anmerkungen:

Direkt am Einheitskreis kann man ablesen, dass

- $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$ und $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$.
- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$. (Periodizität von Sinus und Kosinus)
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. (Symmetrieeigenschaften von Sinus und Kosinus)

5.3 Bogenmaß

Um die trigonometrischen Funktionen als reelle Funktionen definieren zu können, muss die Größe eines Winkels durch eine reelle Zahl ausgedrückt werden. Dazu dient das sogenannte *Bogenmaß*. Da man jeden Winkel α eindeutig als den Punkt $P(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ zuordnen kann, ist α auch durch die auf dem Einheitskreis vom Punkt $(1, 0)$ zu P entgegen dem Uhrzeigersinn zurückgelegte Strecke eindeutig festgelegt. Das *Bogenmaß* eines Winkels α ist die Länge des zugehörigen Kreisbogens.

Zwischen dem Winkel α und der zugehörigen Bogenlänge x besteht folgender Zusammenhang:

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

5.4 Rechenregeln für Sinus und Kosinus

Unabhängig von der Bogenlänge x (oder dem Winkel α) gilt stets die folgende wichtige Beziehung:

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1.$$

Diese Aussage folgt aus dem Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck am Einheitskreis.

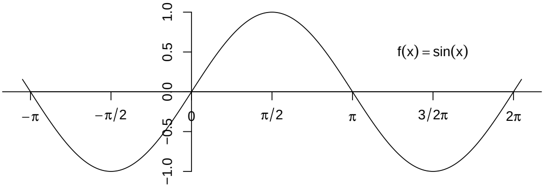
Weiter gelten die sogenannten *Additionstheoreme:*

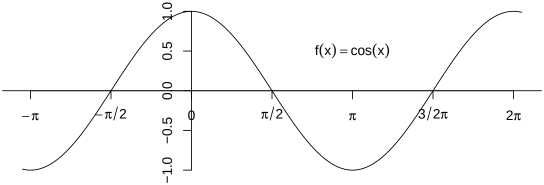
$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y).$$

5.5 Die Sinus- und die Kosinusfunktion

Ordnet man jeder Bogenlänge $x \in \mathbb{R}$ den zugehörigen Sinus- bzw. Kosinuswert zu, ergeben sich
die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \to \sin x$ und
die Kosinusfunktion $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \to \cos x$.





5.5 Die Sinus- und die Kosinusfunktion

Anmerkungen:

- Das Schaubild der cos-Funktion entsteht durch Verschieben des Schaubildes der sin-Funktion entlang der x-Achse um $\frac{\pi}{2}$ nach links; d.h.:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

- Wie wir schon am Einheitskreis erkannt haben, ist $\sin(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung und $\cos(x)$ achsensymmetrisch zur y-Achse.

5.5 Die Sinus- und die Kosinusfunktion

Die allgemeine Sinusfunktion

Unter einer allgemeinen Sinusfunktion versteht man eine Funktion f mit einer Funktionsgleichung der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$.

d: mittlerer Funktionswert der Funktion

a: (Amplitude) die maximale Abweichung von diesem Mittelwert

c: Beginn der „ersten“ Periode.

p : Periodenlänge; sie ergibt sich aus der Beziehung $p = \frac{2\pi}{b}$.

5.6 Die Tangensfunktion

Die Tangensfunktion tan, $x \to \tan(x)$ hat den Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ und den Wertebereich $W = \mathbb{R}$.