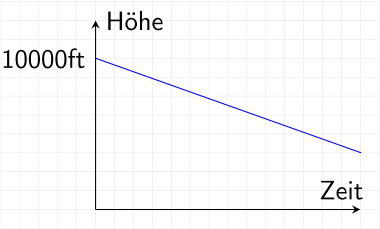
Vorkurs Mathematik

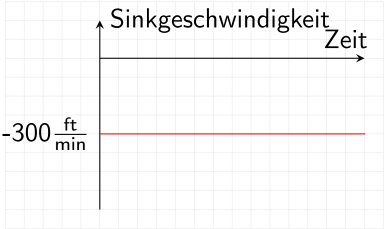
6. Differentiation

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften

6.1 Änderungsverhalten einer Funktion





Änderung der Flughöhe eines Flugzeugs im Anflug auf den Flughafen.

Gleichmäßige Sinkgeschwindigkeit.

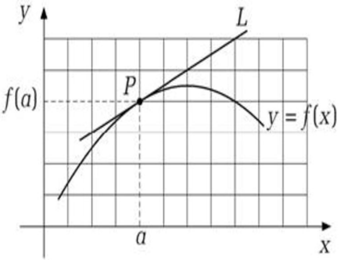
6.1 Änderungsverhalten einer Funktion

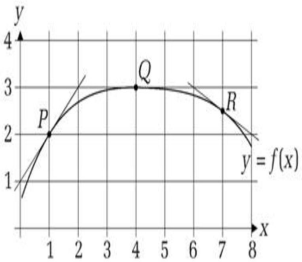
Das Änderungsverhalten einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $a \in D$ wird durch den *Differenzenquotienten* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ oder auch $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ mit $h = x - a$ beschrieben. In Anwendungskontexten nennt man diesen Term auch *mittlere Änderungsrate*.

Geometrisch bedeutet der Differenzenquotient im Intervall $I = [a; a+h]$ für $h > 0$ die Steigung der Geraden durch die beiden Punkte $P(a; f(a))$ und $Q(a+h; f(a+h))$.

6.2 Die Ableitung

- Wie kann man auf präzise Weise die Steilheit eines Graphen messen?

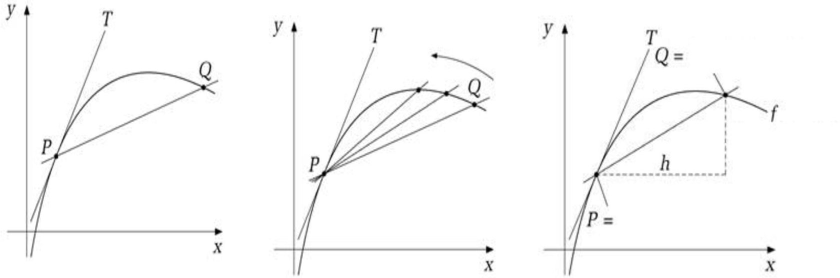




- Die Steigung der Tangente im Punkt P misst die Steigung der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $(a, f(a))$.
- Bei nichtlinearen Funktionen kann die Steigung von Punkt zu Punkt variieren!

6.2 Die Ableitung

Von der Sekante zur Tangente:



Die Steigung der Sekante ist gegeben durch den **Differenzenquotienten**:

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

6.2 Die Ableitung

Definition: Differentialquotient; erste Ableitung

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$ mit dem Definitionsbereich D_f.
Existiert für einen Wert $a \in D_f$ der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

so heißt dieser Grenzwert **Differentialquotient** oder **erste Ableitung** der Funktion f an der Stelle a. Diese Zahl gibt die Steigung der Funktion im Punkt $(a, f(a))$ an.

6.2 Die Ableitung

Definition: Tangente

Die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(a, f(a))$ ist

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \text{ (Punkt-Steigungs-Formel).}$$

Übliche Schreibweisen für Ableitungen:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \; ; \; \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} \; ; \; \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a} \; ; \; y'|_{x=a} \; ; \; y'(a)$$

6.2 Die Ableitung

Definition: Ableitungsfunktion

Existiert zu einer Funktion $y = f(x)$ in jedem Punkt x eines Intervalls I (mit $I \in D_f$) die (erste) Ableitung $f'(x)$, so heißt f (in I) **differenzierbar**.
Die Funktion f', die jedem $x \in I$ die zugehörige (erste) Ableitung $f'(x)$ von f zuordnet, heißt **(erste) abgeleitete Funktion** von f oder **Ableitungsfunktion** von f.

6.3 Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
$x^r\,;\, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$r \cdot x^{r-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

6.4 Differentiationsregeln

1. **additive Konstante** $y = c + f(x), \quad c \in \mathbb{R};\ c = \text{konst.}$
   $$\longrightarrow \quad y' = f'(x)$$
2. **multiplikative Konstante** $y = c \cdot f(x), \quad c \in \mathbb{R};\ c = \text{konst.}$
   $$\longrightarrow \quad y' = c \cdot f'(x)$$
3. **Summenregel:** $y = f(x) \pm g(x)$
   $$\longrightarrow \quad y^{'} = f^{'}(x) \pm g^{'}(x)$$
4. **Produktregel:** $y = f(x) \cdot g(x)$
   $$\longrightarrow \quad y^{'} = f^{'}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{'}(x)$$

6.4 Differentiationsregeln

5. **Quotientenregel:** $y = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{mit} \quad g(x) \neq 0$

$$\longrightarrow \quad y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

6. **Kettenregel:** $y = f(g(x))$ mit $y = f(z)$ als Äußerer Funktion und $z = g(x)$ als innerer Funktion

$$\longrightarrow \quad y' = f'(z) \cdot g'(x)$$

6.5 Lineare Approximation

Die Tangente an den Graphen einer Funktion f an der Stelle x_0 ist die Gerade, die an der Stelle x_0 den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung wie f hat. Man sagt daher, sie approximiert die Funktion f in der Umgebung von x_0. Die allgemeine Tangentengleichung an den Graphen von f im Punkt $(x_0; f(x_0))$ ist gegeben durch:

$$T_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$