Vorkurs Mathematik

7. Kurvendiskussion

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften

7.1 Monotonie

Definition: Monotonie

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f(x)$

- streng monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- monoton steigend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- monoton fallend, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

7.1 Monotonie

Mit Hilfe des **Vorzeichens der ersten Ableitung** einer Funktion ist es möglich, für (differenzierbare) Funktionen die **schwache Monotonie** über folgende Zusammenhänge zu überprüfen:

- $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I \quad \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend auf I;
- $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I \quad \Leftrightarrow f$ ist monoton fallend auf I;
- ebenso gilt: $f'(x) = 0$ für alle $x \in I \quad \Leftrightarrow f$ ist konstant auf I.

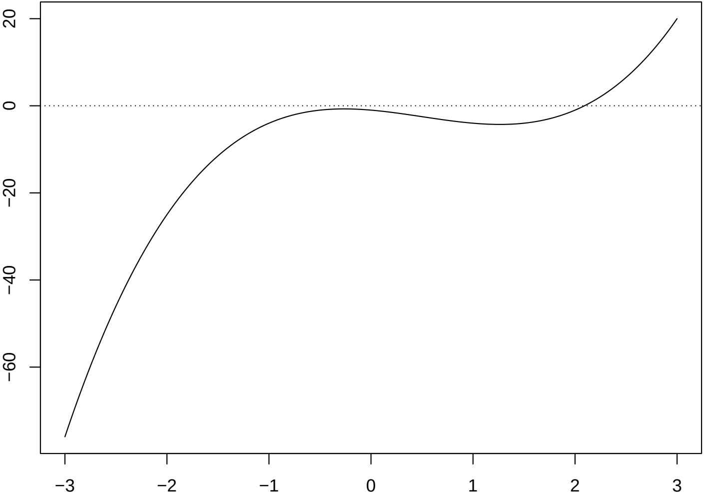
Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, wie man am Beispiel $f(x) = x^3$ erkennt. Die Funktion f ist streng monton wachsend, aber es ist $f'(0) = 0$.

7.1 Monotonie

- Für die **strenge Monotonie** gelten lediglich folgende Implikationen:
  - $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$
    $\Rightarrow f \quad$ ist streng monoton wachsend auf I;
  - $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$
    $\Rightarrow f \quad$ ist streng monoton fallend auf I.

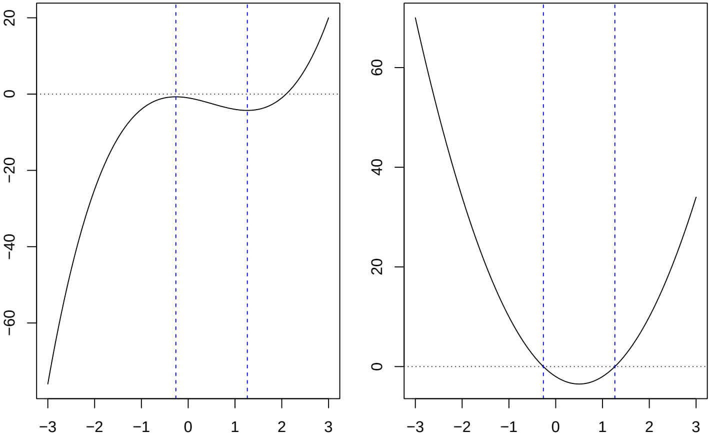
7.1 Monotonie

Beispiel: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x - 1$



7.1 Monotonie

Beispiel: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x - 1$



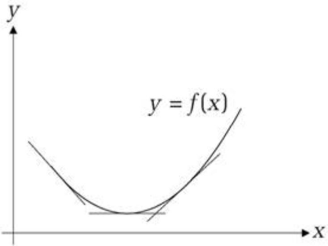
7.2 Krümmungsverhalten

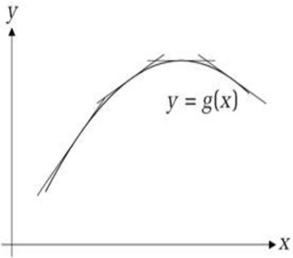
SATZ: Krümmungsverhalten differenzierbarer Funktionen

Gegeben sei eine zweimal differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Gilt für alle $x \in I \subset D_f$:

a) $f''(x) > 0$, so ist f' im Intervall I streng monoton wachsend und der Graph von f ist **linksgekrümmt**;

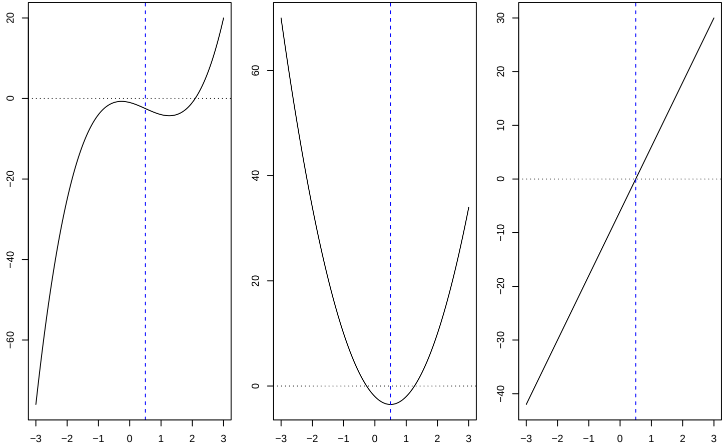
b) $f''(x) < 0$, so ist f' im Intervall I streng monoton fallend und der Graph von f ist **rechtsgekrümmt**.





7.2 Krümmungsverhalten

Beispiel: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x - 1$



7.3 Kurvendiskussion

Definition: Lokale Extremwerte

Eine Funktion f hat ein *lokales Maximum* an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereichs D_f, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D_f$ gilt, die in einem offenen Intervall um x_0 liegen.
Eine Funktion f hat ein *lokales Minimum* an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereichs D_f, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D_f$ gilt, die in einem offenen Intervall um x_0 liegen.
Lokale Extrema nennt man auch *relative Extrema*.

7.4 Kurvendiskussion

Definition: Globale Extremwerte

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann hat f an der Stelle $x_0 \in D_f$ ein *absolutes (globales) Maximum*, wenn gilt

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in D_f.$$

Die Funktion f hat ein *absolutes (globales) Minimum* auf D_f an der Stelle x_0, wenn gilt

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in D_f.$$

7.4 Kurvendiskussion

Die Hauptaufgabe der Optimierungstheorie besteht in der Bereitstellung allgemeingültiger Methoden zur Auffindung von Extrempunkten. In diesem Zusammen spielen **stationäre Punkte** eine wichtige Rolle. Unter einem stationären Punkt wollen wir alle Punkte $c \in D_f$ einer Funktion f verstehen, für die gilt: $f'(c) = 0$, d.h. die eine waagrechte Tangente besitzen.

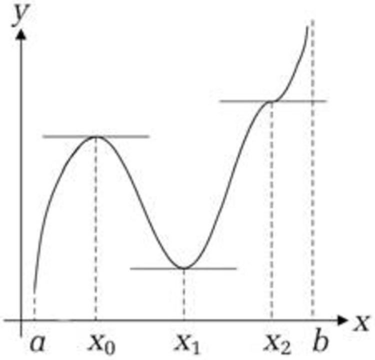
SATZ: notwendige Bedingung für einen Extremwert

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $y = f(x)$. Notwendige Bedingung für einen Extremwert der Funktion an einem inneren Punkt $c \in I \subset D(f)$ ist das Verschwinden der ersten Ableitung:

$$f'(c) = 0 \, .$$

7.4 Kurvendiskussion

Beachte: Die Bedingung im obigen Satz ist lediglich notwendig, aber nicht hinreichend für einen Extremwert! D.h. wir können die Lösung(en) der Gleichung $f'(x) = 0$ lediglich als stationäre Punkte betrachten und haben damit die Kandidaten für die Extremwerte ermittelt. Weitere Untersuchungen müssen aus diesem Kreis erst die Extremwerte auswählen.



7.4 Kurvendiskussion

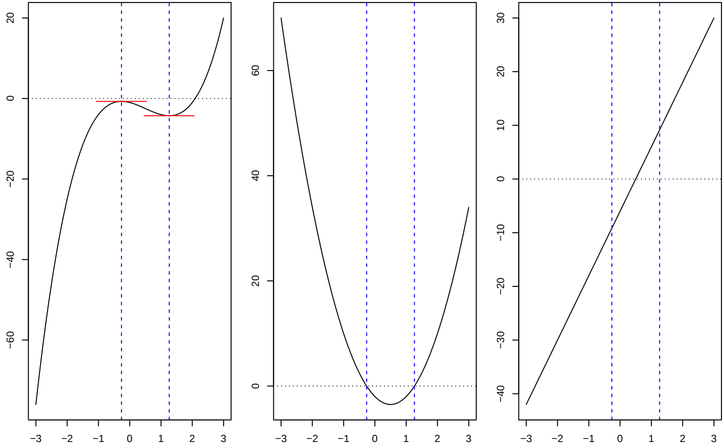
SATZ: hinreichende Bedingung für einen Extremwert

Ist f eine auf einem Intervall zweimal differenzierbare Funktion, so muss für eine innere Extremstelle $x_0 \in I$ von f gelten: $f'(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung). x_0 ist dann eine

- Maximumstelle, wenn $f''(x_0) < 0$ ist (*hinreichende Bedingung*) oder wenn $f'(x)$ an dieser Stelle das Vorzeichen von + nach - wechselt
- Minimumstelle, wenn $f''(x_0) > 0$ ist (*hinreichende Bedingung*) oder wenn $f'(x)$ an dieser Stelle das Vorzeichen von - nach + wechselt.

7.4 Kurvendiskussion

Beispiel: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x - 1$



7.5 Wendepunkte

Definition: Wendepunkt

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$. Eine Stelle $c \in I \subset D_f$ heißt **Wendepunkt**, wenn die Funktion links von c eine andere Krümmung besitzt als rechts davon.

Zum Auffinden von Wendepunkten verwendet man folgenden Satz:

SATZ: Untersuchung auf Wendepunkte

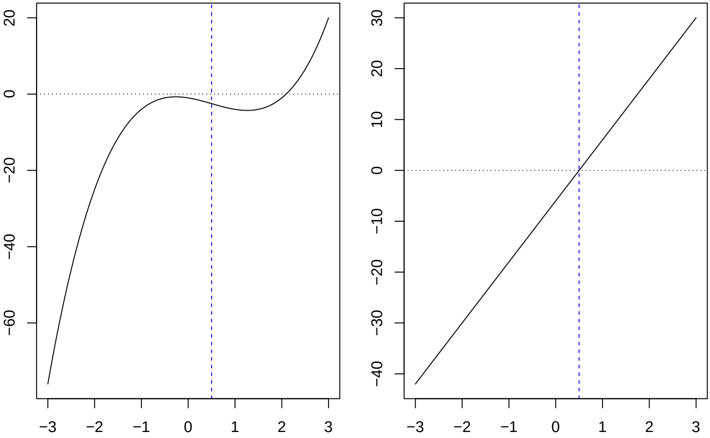
Sei $y = f(x)$ eine im Intervall $I \subset D_f$ zweimal differenzierbare Funktion, und c sei in innerer Punkt von I.

a) Falls c ein Wendepunkt für f ist, dann gilt: $f''(c) = 0$.

b) Falls $f''(c) = 0$ und f'' das Vorzeichen an der Stelle c wechselt, dann ist c ein **Wendepunkt** für f.

7.5 Wendepunkte

Beispiel: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x - 1$



7.5 Wendepunkte

Beispiel: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x - 1$