Vorkurs Mathematik

8. Integralrechnung

Dr. Günter Winterholer

Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

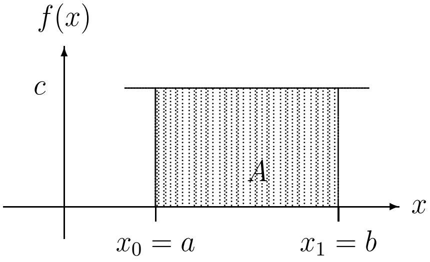
UNIVERSITÄT HOHENHEIM

8.1 Das bestimmte Integral

Motivation für die Integralrechnung:

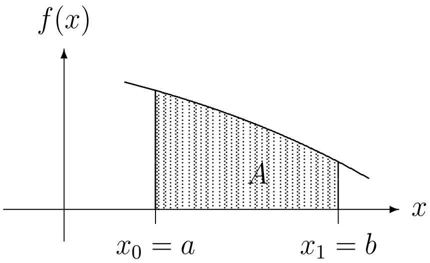
- zur Berechnung der Fläche „unter einer Kurve"
  $\Longrightarrow$ Begriff des bestimmten Integrals.

Berechnung der Fläche auf dem Intervall $[a; b]$ unter einer konstanten Funktion mit $f(x) = c$:
Der Flächeninhalt A des Rechtecks ergibt sich mittels der Formel:
Grundlinie $\times$ Höhe, also $(b - a)\,c$.



8.1 Das bestimmte Integral

Bei einer **beliebigen** auf dem Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion $f(x)$ mit $f(x) \geq 0$ steht jedoch im allgemeinen für die Berechnung der Fläche unter der Kurve keine einfache Formel zur Verfügung.



$\Longrightarrow$ Flächenberechnung mittels eines Grenzprozesses (vgl. Ableitung).

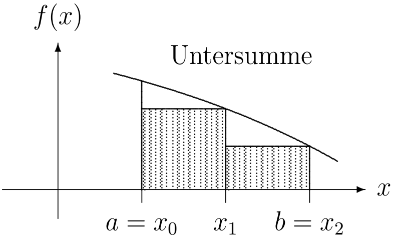
8.1 Das bestimmte Integral

Beispiel mit zwei (Teil-)Intervallen:

Untersumme:

$$U = f(x_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_2) \cdot (x_2 - x_1)$$

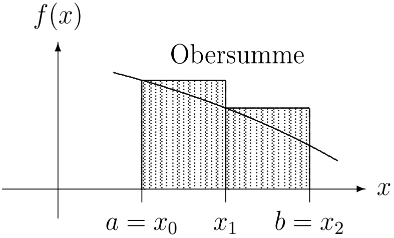
(*Unterschätzung der Fläche A*)



Obersumme:

$$O = f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

(*Überschätzung der Fläche A*)



8.1 Das bestimmte Integral

Es ist offensichtlich, dass die Approximation umso genauer wird, je kleiner die Über- bzw. Unterschätzung ist. Dies wird durch schmalere Rechtecke erreicht, d.h. also durch eine Erhöhung ihrer Anzahl.

Den interessierenden Flächeninhalt erhält man über einen Grenzprozeß, wobei die Anzahl der (bspw. äquidistanten) Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gegen $n \to \infty$ strebt:

$$\text{Fläche von A} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$\text{mit} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ und } x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \; .$$

8.1 Das bestimmte Integral

Existiert der Grenzwert für die Obersumme und ebenso der Grenzwert der Untersumme und sind beide gleich, so nennt man diesen Grenzwert **bestimmtes Integral** (Riemann Integral):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

dabei ist x die **Integrationsvariable**; a und b ist die untere bzw. obere **Integrationsgrenze**.

8.1 Das bestimmte Integral

ANMERKUNGEN:

- Die Definition des bestimmten Integrals ist unabhängig von der Wahl der Punkte ξ_i, d.h. sie können beliebig im Intervall $[x_{i-1}; x_i]$ gewählt werden.
- Bedingungen für die Integrierbarkeit einer Funktion werden in zahlreichen Sätzen der Analysis aufgestellt. Das wichtigste (hinreichende) Existenzkriterium für den Grenzwert der Summe lautet: *Jede im Intervall $[a; b]$ **stetige** Funktion $f(x)$ ist dort auch (Riemann-)integrierbar.* Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch nicht (eine integrierbare Funktion muss keineswegs stetig sein)!

8.1 Das bestimmte Integral

ANMERKUNGEN (Fort.):

- Das bestimmte Integral ist keine Funktion, sondern eine feste (reelle) Zahl. Dieser Wert kann auch negativ sein, da in obiger Definition nicht verlangt wird, dass der Integrand positiv ist.

  $\Longrightarrow$ Flächenstücke oberhalb der Abszisse werden positiv gezählt, Flächenstücke unterhalb davon negativ.

8.1 Das bestimmte Integral

Sind f und g über dem Intervall $[a; b]$ integrierbar, so erfüllt das bestimmte Integral folgende Rechenregeln:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)d(x) = 0$
3. $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

8.2 Stammfunktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition: Stammfunktion

Eine differenzierbare Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.
Man schreibt $F(x) = \int f(x)dx$.

$f(x)$ heißt **Integrand** und x heißt **Integrationsvariable**. Man bezeichnet ein unbestimmtes Integral auch mit

$$\int f(x)\,dx.$$

8.2 Stammfunktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist die Funktion f im Intervall $[a; b]$ integrierbar und ist F eine Stammfunktion von f im Intervall $[a; b]$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Schreibweise: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

8.2 Stammfunktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Funktion f	Stammfunktion F
$f(x) = 0$	$F(x) = c$
$f(x) = b$	$F(x) = bx + c$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$
$f(x) = x^\alpha$	$F(x) = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$
$f(x) = \sin(kx)$	$F(x) = -\frac{1}{k}\cos(kx) + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = e^{kx}$	$F(x) = \frac{1}{k}\, e^{kx} + c$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + c$