# Vorkurs Mathematik

## 9. Wahrscheinlichkeit und Statistik

Prof. Dr. Thomas Dimpfl

*Fachgebiet Wirtschaftsmathematik und Datenwissenschaften*

UNIVERSITÄT HOHENHEIM

# 9.1 Zentrales Konzept: Zufallsexperiment

Wir sprechen von einem Zufallsexperiment, wenn

1. mögliche Ergebnisse des Experiments bekannt sind
2. das Ergebnis eines konkreten Versuchs des Experiments nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden kann
3. das Experiment unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist.

# 9.1 Zentrales Konzept: Zufallsexperiment

- zweimaliges Werfen einer Münze
- Werfen einer Münze und eines Würfels
- Roulette-Spiel
- zufällige Ziehung eines Merkmalsträgers aus einer Grundgesamtheit (mit Zurücklegen)

---

- Bewegung ↑↓ eines Aktienkurses in $n$ aufeinanderfolgenden Perioden
- zukünftige wirtschaftliche Entwicklung
- Betreiben eines AKW in Erdbebengebiet

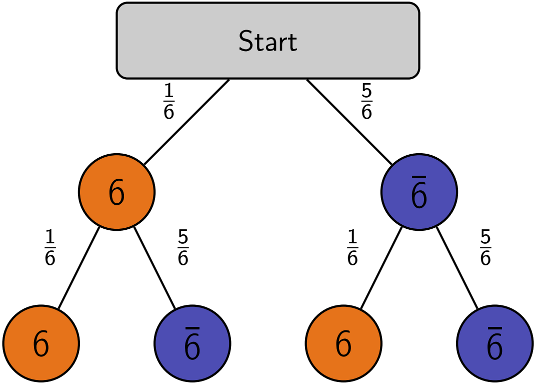
# 9.1 Zentrales Konzept: Zufallsexperiment

**Elementarereignisse** ($e$)
Die einzelnen, nicht mehr zerlegbaren und sich gegenseitig ausschließenden Ausgänge eines Zufallsexperiments heißen Ergebnisse bzw. Elementarereignisse.

**Beispiel:**
Ein Spieler darf zweimal würfeln. Der Einsatz beträgt 1 € und für jede geworfene 6 erhält er 1 € ausbezahlt. Der Gewinn hängt vom Zufall ab und ist daher eine Zufallsgröße/Zufallsvariable $X$.

# 9.1 Zentrales Konzept: Zufallsexperiment

Baumdiagramm zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten eines bestimmten Gewinns:




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $1$ | $0$ | $0$ | $-1$ |
| $P(X = x_i)$ | $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ | $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ |

# 9.1 Zentrales Konzept: Zufallsexperiment

## Multiplikationssatz

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei oder mehr Ereignisse aus voneinander unabhängigen Zufallsexperimenten gemeinsam auftreten, entspricht dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten.

## Additionssatz

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zufallsexperiment eines von mehreren sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen auftritt, entspricht der Summe ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten.

# 9.2 Erwartungswert und Varianz

Der Erwartungswert ist eine Kenngröße, um sich einen Überblick über die Lage einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zu verschaffen. Er berechnet sich als die mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichtete Summe der Ausprägungen der Zufallsvariablen.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \, P(X = x_i)$$

**Hinweis:** Der Erwartungswert muss kein Wert sein, den die Zufallsgröße $X$ annehmen kann.

**Im Beispiel:**

$$\mathbb{E}[X] = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 0 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot (-1) = -\frac{2}{3}$$

# 9.2 Erwartungswert und Varianz

Die Varianz beschreibt, ob sich die Ausprägungen der Zufallsvariablen um den Erwartungswert konzentrieren oder sich weit verteilen (Streuungsmaß). Sie ist definiert als die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert.

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_i \left[ (x_i - \mathbb{E}[X])^2 \cdot P(X = x_i) \right]$$

**Im Beispiel:**

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(0 + \frac{2}{3}\right)^2 \\ &\quad + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(0 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{36} \end{aligned}$$

# 9.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Das Eintreten eines Ereignisses kann die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses beeinflussen.

**Beispiel: im Hörsaal**

Teilen wir die Studierenden in zwei Kategorien ein: $A$:= "die/der Studierende hat blonde Haare" und $B$:= "die/der Studierende wohnt in Stuttgart"

| | $A$ | $\bar{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 16 | 12 | 28 |
| $\bar{B}$ | 8 | 76 | 84 |
| | 24 | 88 | 112 |

Wahrscheinlichkeit, dass ein(e) blonde(r) Stuttgarter(in) an die Tafel gerufen wird:

$$P(A \cap B) = \frac{16}{112}$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein(e) Stuttgarter(in) an die Tafel gerufen wird, wenn die Person blond ist:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{16/112}{24/112} = \frac{16}{24}$$

# 9.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

### Definition

Für zwei Ereignisse $A$ und $B$ heißt der Quotient

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von $B$ unter der Bedingung, dass $A$ eingetreten ist (mit $P(A) \neq 0$).

# 9.4 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung beschreibt die Verteilung eines wiederholten Experiments mit nur einem Ereignis (“Erfolg”) und dem entsprechenden Gegenereignis (“Mißerfolg”). Das Ereignis tritt für jedes Einzelexperiment mit der Wahrscheinlichkeit $p$ ein, das Gegenereignis mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$.
Für ein Zufallsexperiment, das sich aus $n$ unabhängigen Einzelexperimenten mit den obigen Eigenschaften zusammensetzt, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass $k$ Erfolge auftreten (mit $0 \leq k \leq n$) als

$$P(Z = k \mid n; p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

# 9.4 Binomialverteilung

Lagemaße der Binomialverteilung:

Ist $Z$ binomailverteilt mit Stichprobenumfang $n$ und Wahrscheinlichkeit $p$, so gilt:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{E}[Z] & = & np \\ \mathrm{Var}[Z] & = & npq \end{array}$$

# 9.4 Binomialverteilung

<u>Beispiel:</u>
Ein Ausflugsschiff hat 100 Plätze. Da erfahrungsgemäß 15% der Buchungen wieder rückgängig gemacht werden, nimmt der Eigentümer grundsätzlich 115 Buchungen an.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Asuflug kein Passagier, der gebucht hat, abgewiesen werden muss.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben bei einem Ausflug mehr als 5 Plätze frei?

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Ausflug Passagiere, die gebucht haben, keinen Platz bekommen, soll kleiner als 5% sein. Wie viele Buchungen dürfen dann angenommen werden?

# 9.5 Einseitiger Test

<u>Szenario:</u>
Sie spielen mit einem Taschenspieler, der eine Münze wirft. Wenn die Münze fair ist, kommen Kopf und Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ vor. Es könnte aber sein, dass die Münze gezinkt ist und zu Kopf neigt.

$H_0$ (die Nullhypothese): “Die Münze ist fair”
$H_A$ (die Alternativhypothese): “Die Münze ist nicht fair”

Wir werfen die Münze 100 Mal. Was kann passieren?

# 9.5 Einseitiger Test

Zwei mögliche Fehlerarten:

- Fehler 1. Art ($\alpha$-Fehler)

  Die Nullhypothese stimmt, aber sie wird verworfen.
  $\rightarrow$ Im Beispiel: Sie tauschen die Münze unnötigerweise aus.

- Fehler 2. Art ($\beta$-Fehler)

  Eine Nullhypothese ist falsch, aber sie wird nicht verworfen.
  $\rightarrow$ Im Beispiel: Der Taschenspieler benutzt weiter die gezinkte Münze.

# 9.5 Einseitiger Test

Überprüfen der Münze: 8 mal werfen, es resultiert 6 mal “Kopf”

Unabhängige Ereignisse:
Erwartungswert der Binomialverteilung $\mu = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

Frage: wie plausibel ist 6 mal “Kopf” unter der Nullhypothese? Also 6 oder 7 oder 8 mal, wenn man 8 mal würfelt.

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable $X :=$„Anzahl Kopf“ unter der $H_0$:

| | Summe |
|---|---|
| $P(X = 6) = 0,109$ | $0,109$ |
| $P(X = 7) = 0,031$ | $0,140$ |
| $P(X = 8) = 0,004$ | $0,144$ |

# 9.5 Einseitiger Test

Wann verwerfen wir die $H_0$?

<u>Signifikanzniveau</u>:

$\alpha$ - maximal tolerierte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art

hier z. B.: $\alpha = 0,05$

Im Beispiel: $P(X \geq 6) \approx 0,144 > 0,05$, daher wird $H_0$ nicht verworfen

Anders ausgedrückt: man müsste einen Fehler erster Art von 15% tolerieren, um $H_0$ verwerfen zu können.